第 6 章　用散乱数据插值方法求微分方程的数值解

§6.1　泛函信息插值与微分方程的数值解

一般的线性偏微分方程可以由下式表示 [29,51]

$$
\begin{aligned}
Pu &= \sum p_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\
Qu &= \sum q_\alpha(x) D^\alpha u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

由线性算子表示定理, 存在广义函数

$$
\begin{aligned}
P(x,y) &= \sum p_\alpha(x) \delta^{(\alpha)}(x-y), \\
Q(x,y) &= \sum q_\alpha(x) \delta^{(\alpha)}(x-y),
\end{aligned}
$$

上述线性偏微分方程可以用积分表示

$$
\begin{aligned}
Pu &= \int_\Omega P(x,y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\
Qu &= \int_{\partial\Omega} Q(x,y)u(y)dy = g(x), \quad x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

这样可以讨论更一般的方程.

如果有广义函数 $\{P(x,y), Q(x,y)\}$(其中 x 可以看成为参数) 关于 y 有

$$
P(x,y) \in C^*(\Omega),\ Q(x,y) \in C^*(\partial\Omega).
$$

讨论以下形式的方程

$$
\begin{aligned}
Pu &= \int_\Omega P(x,y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\
Qu &= \int_{\partial\Omega} Q(x,y)u(y)dy = g(x), \quad x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

这类方程包括线性偏微分方程、线性积分方程、线性积分微分混合方程及时间滞后的方程等大量在实际应用中会碰到的线性微积分方程, 其基本的假设是, 有两个 (也可以是多个) 线性的方程变换算子 $\{P, Q\}$, 把函数 (未知函数)u 变换成一些已知的函数 $f \in C(\Omega)$ 及 $g \in C(\partial\Omega)$：

$$
\{P, Q\}u = \{f, g\}.
$$

所谓解方程就是寻找函数 u, 或者 $\{P,Q\}$ 的逆算子. 下面是这类方程的一个典型的例子.

例 6.1.1

$$P(x,y)=\sum c_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}\delta(x-y-\bar{c}_\alpha)}{\partial y^\alpha}+p_1(x,y),$$

$$Q(x,y)=\sum d_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}\delta(x-y-\bar{d}_\alpha)}{\partial y^\alpha}+q_1(x,y). \tag{6.1}$$

为了对这个微分方程的数值解方法进行进一步的讨论, 我们给出如下的定义.

定义 6.1.1 (1) 方程算子 $\{P,Q\}$ 是 l 阶的, 如果函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 对固定的 x 是 $C^l(\Omega)$ 的对偶空间 $C^{l*}(\Omega)$ 中的函数 (式 (1) 中求和是在 $|\alpha|\leqslant l$ 范围内);

(2) 方程算子 $\{P,Q\}$ 是 L 阶连续的, 如果算子把 C^∞ 函数映照成 C^L 函数. $\{P,Q\}(C^\infty)\subset(C^L(\Omega),C^L(\partial\Omega))$. 这意味着 $P(x,y),Q(x,y)$ 关于 x 的直到 L 阶的导数是 $(C^l)^*$ 空间的函数 (比较式 (1) 如果 $c_\alpha(x),d_\alpha(x)\in C^L$ 且 $p_1(x,y),q_1(x,y)$ 关于 x 有直到 L 次的连续导数, 关于 y 可积);

(3) 如果方程算子是 l 阶的, 那么空间 S_l^p(注意这里的空间定义比通常的 Sobolev 空间定义严格, 是从连续函数出发的) 是由所有的 C^l 函数组成, 而这个空间的 p 范数由函数的所有的不超过 l 阶的导数的 p 范数的和定义, 即

$$\|u\|=\sum_{|\alpha|\leqslant l}\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|_p,$$

由泛函分析知识得到这个范数等价于

$$\|u\|_p+\sum_{|\alpha|=l}\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right\|_p.$$

这里主要讨论微分方程在 S_l^∞ 中的解 (而不考虑弱解, 弱解可以采用磨光逼近的办法处理), 所以把它简记为 S_l.

如果方程是 l 阶的, 且是 L 阶连续的, 那么方程算子把 C^l 函数映照成连续函数, 且把 C^∞ 函数映照成 C^L 函数.

$$\{P,Q\}(S_l)\to C^0(\Omega)\times C^0(\partial\Omega),$$

$$\{P,Q\}(S_l\cap C^\infty)\to C^L(\Omega)\times C^L(\partial\Omega).$$

记 O: $Ou=(Pu,Qu)=(f,g)$.

现在对方程离散化. 在区域 Ω 内取一些点 $\{x_j\}_{j=1}^n$, 边界 $\partial\Omega$ 上取一些点 $\{x_j\}_{j=n+1}^{n+m}$. 令

$$h=\max_{x\in\Omega,y\in\partial\Omega}\{\min_{j=1,\cdots,n}\|x-x_j\|,\min_{k=n+1,\cdots,n+m}\|y-x_k\|\}$$

为方程的离散密度, 从而把微分方程离散成一组线性泛函方程

$$
\begin{aligned}
P_j u = f(x_j) = &\int_\Omega p(x_j, y)u(y)dy,\\
x_j \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, &j = 1, \cdots, n,\\
Q_j u = g(x_j) = &\int_{\partial\Omega} q(x, y)u(y)dy,\\
x_j \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d, &j = n+1, \cdots, n+m.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

由关于线性泛函信息数据的插值章节, 求解这个离散方程 (6.2) 等价于求解一个线性泛函数据 (Hermite 型) 的插值问题, 如果算子 $\{P_j\}_{j=1}^n, \{Q_j\}_{j=n+1}^{n+m}$ 线性无关, 那么就可以利用前面的关于 Hermite 数据的插值介绍的方法做出泛函信息值的 Kriging 插值或径向基函数插值, 它的解可以写成关于数据 $f(x_j), g(x_k)$ 的线性组合或者说可以写成如下的对偶形式

$$
u^*(x) = \sum_j \lambda_j P_j \Phi(x - x_j) + \sum_k \mu_k Q_k \Phi(x - x_k),
\tag{6.3}
$$

其中 P_j, Q_k 算子由离散方程定义, 而 λ, μ 满足下面的线性方程

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_j \\ \mu_k \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} f(x_j) \\ g(x_k) \end{pmatrix},
$$

其中子矩阵

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \left(\int\int P(x_{j1}, s)P(x_{j2}, t)\Phi(s-t)dsdt \right),\\
A_{12} &= \left(\int\int P(x_{j1}, s)Q(x_{k2}, t)\Phi(s-t)dsdt \right),\\
A_{21} &= \left(\int\int Q(x_{k1}, s)P(x_{j2}, t)\Phi(s-t)dsdt \right),\\
A_{22} &= \left(\int\int Q(x_{k1}, s)Q(x_{k2}, t)\Phi(s-t)dsdt \right).
\end{aligned}
$$

这样离散方程的解可以写成

$$
u^*(x) = (P(D)\Phi(x - x_j), \quad Q(D)\Phi(x - x_k))A^{(-1)} \begin{pmatrix} f(x_j) \\ g(x_k) \end{pmatrix}.
\tag{6.4}
$$

这只要通过求解一个线性代数方程组得到. 当系数矩阵 A 非奇异时, 容易验证, u^* 满足离散方程, 我们把这个离散方程的解当作微分方程的一个近似.

现在面临两个重要的问题 [29,51]：

(1) 离散方程什么时候是有解的, 也就是解的存在唯一性问题;

(2) 离散方程解与原始方程解之间的误差估计.

第一个问题等价于：满足怎样的条件矩阵 A 才是非奇异的. 先给出一个引理.

引理 6.1.1 *原方程对 $C(\Omega)\times C(\partial\Omega)$ 空间的任意函数都是唯一可解的充分必要条件是存在唯一的广义函数 $\{\lambda,\mu\}$, 使得*

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\lambda(s,x)P(x,y)e^{ity}dydx+\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\mu(s,x)Q(x,y)e^{ity}dydx=e^{its}.$$

证明 如果方程唯一可解, 那么算子 O 的逆算子存在. 由算子本身的线性性质, 得到, 逆算子是线性的. 再由算子表示定理, 存在唯一的广义函数 $\{\lambda,\mu\}$, 满足上述表示式. 反之如果上述表示式成立, 那么由函数 e^{itx} 的基性质 (它的线性组合可以张成全空间), 得到, (λ,μ) 表示了 (P,Q) 的逆算子, 从而解可以写成

$$u(s)=\int_{\Omega}\lambda(s,x)f(x)dx+\int_{\partial\Omega}\mu(s,x)g(x)dx. \qquad \square$$

现在导出离散方程解的存在性定理

定理 6.1.1 *如果 $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ 两两不同, $\{x_j\}_{j=n+1}^{n+m}$ 也两两不同, 那么当原方程是唯一可解时, 离散的方程也是唯一可解的.*

证明 根据泛函信息值 Kriging 插值条件 [20], 要证泛函 $\{P_j\}_{j=1}^{n}$ 及 $\{Q_j\}_{j=n+1}^{n+m}$ 的线性无关性. 用反证法, 假设它们是线性相关的, 那么存在不全为零的数组 $\{a_j\}_{j=1}^{n}$, $\{b_j\}_{j=n+1}^{n+m}$, 满足 $\sum a_jP_j+\sum b_jQ_j$ 是零泛函. 又由上述取点的方法知道, $\sum a_jP_j$ 与 $\sum b_jQ_j$ 不能都是零泛函, 否则

$$\{\lambda(s,x)+\sum a_j\delta(x_j),\mu(s,x)+\sum b_j\delta(x_j)\}$$

是另一个与 $\{\lambda,\mu\}$ 不同的满足上一个引理的表示式. 这与原方程的唯一可解性条件矛盾. $\square$

利用针对 Hermite 数据的插值方法, 已经有了微分方程近似数值解的一个方法及解的存在唯一性定理. 要指出的是这个方法还有如下优点：

(1) 只要布点, 而不需要如有限元法对这些点进行区域剖分;

(2) 与空间的维数无关, 这个方法适应多变量的问题, 与有限元法比较, 多元的高连续的有限元构造是一个非常困难的问题;

(3) 这个方法适应于分段不同边界条件, 有交界面及不同混合介质的区域问题;

(4) 数值解有明确的数学表达式, 从而可以用来进行后期分析 (譬如风洞试验等);

(5) 这个数值解可以达到高次光滑连续, 而有限元法一般是低次连续的.

现在已经得到离散方程唯一可解性条件, 当然还希望离散方程解是对原方程解的逼近.

由 (6.4), 离散方程解有一个对偶表示

$$u^*(x) = \sum_j \lambda_j(x) f(x_j) + \sum_k \mu_k(x) g(x_k), \tag{6.5}$$

其中 λ, μ 满足下面的线性方程

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(D)\Phi(x-x_j) \\ Q(D)\Phi(x-x_k) \end{pmatrix},$$

注意这里 $\lambda(x), \mu(x)$ 与以前的记号 λ, μ 的不同.

由关于径向基函数插值的收敛性分析知道, 径向基函数插值使得 Kriging 范数

$$\int \hat{\Phi}(w) I^2(w,x) dw$$

最小化. 其中

$$\begin{aligned} I(w,x) := \quad & \sum_j \lambda_j(x) \int P(x_j, s) e^{iws} ds \\ & + \sum_k \mu_k(x) \int Q(x_k, s) e^{iws} ds - e^{iwx}. \end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式, 误差 $u^*(x) - u(x)$ 的范数受 Kriging 范数控制

$$\begin{aligned} \|u - u^*\|^2 &= |\int \hat{u}(w) I(w,x) dw|^2 \\ &\leqslant \left(\int \frac{\hat{u}^2(w)}{\hat{\Phi}(w)} dw \right) \left(\int \hat{\Phi}(w) I^2(w,x) dw \right). \end{aligned}$$

显然, 如果选择合适的径向函数 (譬如, 由 $u \in C^l$, 得到 $\hat{u} < \mathcal{O}(1 + \|\omega\|)^{-l-d}$, 选取 $\hat{\Phi}(w) \sim C(1 + \|w\|)^{-K}$), 其中 $K < 2l + d$, 那么积分

$$\left(\int \frac{\hat{u}^2(w)}{\hat{\Phi}(w)} dw \right)$$

有界, 这时 K 满足

$$\hat{\Phi}(w) \leqslant C(1 + \|w\|)^{-K}.$$

如同径向基函数插值的证明, 要估计离散方程的误差, 只要分析

$$\int (1 + \|w\|)^{-K} I^2(w,x) dw$$

可以达到怎样小的值.

给定 w, 假设 $\hat{a}(x), \hat{b}(x)$ 是 e^{ixw} 在方程算子下的象

$$\hat{a}(x) = \int P(x,s)e^{isw}ds, \qquad \hat{b}(x) = \int Q(x,s)e^{isw}ds,$$

用形式为

$$a^*(x) = \sum c_j(x)\hat{a}(x_j), \qquad b^*(x) = \sum d_j(x)\hat{b}(x_j) \tag{6.6}$$

的函数 $a^*(x), b^*(x)$ 来逼近函数 $\hat{a}(x), \hat{b}(x)$. 这样逼近的存在性与逼近阶将在以后的定理中给出. 令

$$\lambda_j(x) = \int \Lambda(x,s)c_j(s)ds, \quad \mu_j(x) = \int \Gamma(x,s)d_j(s)ds,$$

那么

$$\{P,Q\}(e^{ixw}) = (\hat{a}, \hat{b}),$$

$$\{P,Q\}\left(\sum \lambda_j(x)\int P(x_j,s)e^{isw}ds + \sum \mu_k(x)\int Q(x_k,s)e^{isw}ds\right) = (a^*, b^*),$$

这样得到如下的关系图

$$\begin{array}{lcl} e^{ixw} & \overset{\{P,Q\}}{\rightarrow} & (\hat{a}, \hat{b}) \\ \updownarrow \text{error} & & \updownarrow \text{approximation} \\ \cdot & \overset{\{P,Q\}^{-1}}{\leftarrow} & (a^*, b^*). \end{array}$$

函数 e^{ixw} 的象是 $(\hat{a}, \hat{b})$, $(\hat{a}, \hat{b})$ 的逼近是 (a^*, b^*), 而它是一个记为 $\cdot$ 的函数的象. 要估计的误差是

$$I(x,w) = \cdot - e^{ixw}.$$

而方程算子将误差 $I(x,w)$ 映照成 (a^*, b^*) 对 $(\hat{a}, \hat{b})$ 的逼近误差. 这样可以通过证明逆算子的有界性并估计逼近误差得到方程的数值解误差.

首先来讨论逆算子的有界性问题.

定理 6.1.2　*如果微分方程对任何给定的右端唯一有解, 那么逆算子 $\{P,Q\}^{-1} = \{\Lambda, \Gamma\}$ 在 $\{P,Q\}(S_l \cap C^{l+1})$ 有界.*

证明　为了证明逆算子的有界性, 证明方程算子对 $\|u\|_{S^l} = 1$, 且 $l+1$ 阶微分有界的函数下有界 $\|\{P,Q\}u\| > c\|u\|$. 用反证法. 如果命题不成立, 那么有函数列 u_n, 满足 $\|u_n\|_{S^l} = 1$ 及 $|u_n^{(l+1)}| < c$, 而 $\|\{P,Q\}u_n\| \to 0$. 这个函数列 u_n 是在 S^l 范数意义下等度连续的. 运用 Arzelà-Ascoli 定理, 有 u_n 的子列一致收敛于函数 u (不妨假设就是函数列本身 u_n 一致收敛于函数 u), 这样有 $\|\{P,Q\}u\| = 0$, 然而由解的存在唯

一性定理, 从 $\|u\|_{S^l}=\lim\|u_n\|_{S^l}=1$ 知道 $u\neq 0$, 这与方程的解的存在唯一性定理矛盾. □

下面的问题是利用形式 (6.6) 构造 $(\hat{a},\hat{b})$ 逼近 (a^*,b^*). 这并不是一个平凡的逼近, 还要求 (a^*,b^*) 的逆象一致地在空间 C^{l+1} 中有界 (即要求 $l+1$ 阶微分是有界的). 显然计算 $a(x_j),b(x_j)$ 要用到数据 $u^\alpha(x_j)$.

利用带导数信息的 Shepard 插值来插值函数 e^{ixw}(参见以前章节)

$$E(x)=\frac{\sum_{j=1}^{n+m}(\sum_{|\alpha|\leqslant l+L}\frac{(iw)^\alpha e^{ix_jw}}{\alpha!}(x-x_j)^\alpha)\prod_{k\neq j}\|x-x_k\|^{l+L+d+2}}{\sum_{j=1}^{n+m}\prod_{k\neq j}\|x-x_k\|^{l+L+d+2}},$$

其中 d 是空间的维数, $(\sum_{|\alpha|\leqslant l+L}\frac{(iw)^\alpha}{\alpha!}(x-x_j)^\alpha)$ 是函数 e^{ixw} 在 x_j 点的 Taylor 展开式, 该式对任何的 $j=1,\cdots,n+m,|\alpha|\leqslant l+L$ 插值了数据 $(e^{ixw})^{(\alpha)}|_{x=x_j}$. 由 Shepard 插值的收敛性讨论知道, 如果区域 Ω 满足某种正则性 (譬如凸区域) 并且数据的密化过程是均匀的 (即存在常数 c_1,c_2, 使得数据点在 $\{x_j\}\cap O(x,h)$ 的个数始终在 c_1 与 c_2 之间), 那么插值误差可以由下式给出

$$\|e^{ixw}-E(x)\|_\infty\leqslant C\|w\|^{l+L+1}h^{l+L+1},$$

进一步地

$$\|(e^{ixw}-E(x))^{(\alpha)}\|_\infty\leqslant C\|w\|^{l+L+1}h^{l+L+1-|\alpha|},$$

从而函数 $E^{(\alpha)}(x)$ 的 $|\alpha|\leqslant l+L+1$ 阶导数都有界.

既然 $E(x)$ 是插值, 所以 $E(x)$ 的象可以写成形式 (6.6), 譬如可以令

$$E_j^*(x)=P(D)\frac{\left(\sum_{|\alpha|\leqslant l+L}\frac{(iw)^\alpha}{\alpha!}(x-x_j)^\alpha\right)\prod_{k\neq j}\|x-x_k\|^{l+L+d+2}}{\sum_{j=1}^{n+m}\prod_{k\neq j}\|x-x_k\|^{l+L+d+2}},$$

那么 $E_j^*(x_k)=\delta_{jk}a(x_j)$, 从而 $\{P(D)E(x),Q(D)E(x)\}$ 可以写成为形式 (6.6). 把上述讨论归结为一个定理

定理 6.1.3 如果方程算子是 L 连续的, 区域 Ω 及数据点 $\{x_j\}$ 满足某种正则条件, 那么可以得到 $\{a^*,b^*\}$ 对 $\{\hat{a},\hat{b}\}$ 的逼近, 并且 $\{a^*,b^*\}$ 的逆象是关于 S^{l+1} 一致有界的. 其逼近误差是

$$|\{a^*,b^*\}-\{\hat{a},\hat{b}\}|\leqslant\mathcal{O}(1+\|w\|)^{l+L+1}h^{L+1},$$

这意味着

$$\|I(x,w)\|_{S^l}\leqslant\mathcal{O}(1+\|w\|)^{l+L+1}h^{L+1},$$

其中的 S^l 范数是关于变量 x 的, 而把 w 看成是参数.

这样可以导出下一个定理

定理 6.1.4 离散方程与原方程的解的误差是与方程算子 $\{P, Q\}$ 的阶 l 及方程的连续阶 L 有关的. 更明确地, 可以选择正定的径向函数 $\Phi \in S^{2(K+l+1)}$

$$|\hat{\Phi}(w)| \sim C(1+\|w\|)^{-2(L+l+1)-d-\varepsilon},$$

使得 $\|u-u^*\|_{S^l} \leqslant \mathcal{O}(h)^{L+1}$.

§6.2　利用其他的多元函数逼近法求解微分方程

上一节把解微分方程的离散方程看作是多元散乱数据的泛函信息的插值问题, 获得了一种微分方程数值解的方法. 回顾微分方程数值解方法, 事实上可以这样叙述微分方程数值解方法：选取一个有限维的函数空间, 在这个空间中, 在某种范数下, 寻找一个微分方程的近似解. 譬如, 有限元方法是用基于剖分的分片线性或多项式函数逼近解, 差分方法是用张量积样条函数逼近解, 而谱方法是用三角多项式逼近解. 所以事实上可以采用任何的多元散乱数据的逼近方法得到微分方程数值解方法. 在选定了有限维函数空间以后, 采用不同的逼近的度量或范数可以得到不同的微分方程数值解. 下面介绍几种方法, 人们可以在其他的微分方程数值解的书籍中找到, 但是采用径向基函数来逼近微分方程的解. 作为例子, 讨论的方程还是

$$\begin{aligned} P(D)u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ Q(D)u(x) &= g(x), \quad x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

1. 最小二乘法

径向基函数在闭区域上连续的函数空间中是稠密的, 也就是说任何闭区域上连续函数可以由径向函数的线性组合逼近. 假设微分方程的解 $u(x)$ 已经有逼近形式

$$u(x) \sim \sum \lambda_j \Phi(x-x_j),$$

这里一般取密集的节点 $x_j \in \Omega$, 也可以取一些 x_j 在区域外, 那么称使得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big(\sum \lambda_j P(D)\Phi(x-x_j) - f(x)\Big)^2 dx \\ &+ w^2 \int_{\partial\Omega} \Big(\sum \lambda_j Q(D)\Phi(x-x_j) - g(x)\Big)^2 dx \end{aligned} \tag{6.7}$$

达到最小的函数 $\sum \lambda_j \Phi(x-x_j)$ 为微分方程最小二乘解. $\lambda = (\cdots, \lambda_j, \cdots)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$A\lambda = D,$$

其中

$$A=(a_{jk})=\left(\int_{\Omega}[P(D)\Phi(x-x_j)][P(D)\Phi(x-x_k)]dx\right.$$
$$\left.+w^2\int_{\partial\Omega}[Q(D)\Phi(x-x_j)][Q(D)\Phi(x-x_k)]dx\right),$$

$$D=(d_j)=\left(\int_{\Omega}P(D)\Phi(x-x_j)f(x)dx+w^2\int_{\partial\Omega}Q(D)\Phi(x-x_j)g(x)dx\right),$$

而 w 是权, 由实际问题对边界及区域内部的不同要求决定. 如果函数 Φ 满足, 当 λ_j 不全为零时, $\sum\lambda_j P(D)\Phi(x-x_j)$ 在 Ω, $\sum\lambda_j Q(D)\Phi(x-x_j)$ 在 $\partial\Omega$ 至少有一个不是零函数, 那么

$$\lambda^T A\lambda=\int_{\Omega}\left[P(D)\sum\lambda_j\Phi(x-x_j)\right]^2dx$$
$$+w^2\int_{\partial\Omega}\left[Q(D)\sum\lambda_j\Phi(x-x_j)\right]^2dx>\neq 0,$$

所以系数矩阵是非奇异的, 从而有唯一的解. 当方程算子 $\{P,Q\}:S_2^l\to S_2^0$ 以及它的逆算子 $\{P,Q\}^{-1}:S_2^0+\omega S_2^0\to S_2^l$ 都有界, $\bar{u}(x)=\sum\bar{\lambda}_j\Phi(x-x_j)$ 是方程解 $u(x)$ 在 Ω 的最佳 S_2^l 逼近, 那么

$$\|\{P,Q\}\bar{u}(x)-\{f,g\}\|_{S_2^0}\leqslant\|\{P,Q\}\|\|\bar{u}(x)-u(x)\|_{S_2^0},$$

通过简单的计算得到, 数值解 $u^*(x)$ 满足

$$\begin{aligned}&\|P(u^*(x)-u(x))\|_{S^0}+\omega\|Q(u^*(x)-u(x))\|_{S^0}\\ \leqslant&\|P(\bar{u}(x)-u(x))\|_{S^0}+\omega\|Q(\bar{u}(x)-u(x))\|_{S^0},\end{aligned}$$

从而

$$\|u^*(x)-u(x)\|\leqslant C\|\bar{u}(x)-u(x)\|,$$

其中 $C=\|\{P,Q\}\|\|\{P,Q\}^{-1}\|$, 所以在径向基函数子空间, 方程的最小二乘解的逼近阶可以达到径向函数子空间最佳逼近的逼近阶.

注 6.2.1 实际问题中 f,g 往往并不是解析给出的, 这时可以用数值积分的办法获得 D.

2. 配置法

上述的方法是希望在象空间中误差的 L^2 范数达到最小, 这个范数可以由积分 (6.7) 表示, 如果取 Ω 的内部密集的点 $\{x_j\}_{j=1}^n$, 边界 $\partial\Omega$ 上密集的点 $\{x_j\}_{j=n+1}^{n+m}$, 用

Riemann 和近似表示积分 (6.7)

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n+m}\lambda_j P(D)\Phi(x_k-x_j)-f(x)\right)^2\Delta_k$$
$$+w^2\sum_{k=n+1}^{n+m}\left(\sum_{j=1}^{n+m}\lambda_j Q(D)\Phi(x_k-x_j)-g(x)\right)^2\Delta_k,$$

其中 Δ_j 是包含点 x_j 的 Riemann 面积元. 求 λ_j, 使得这个式子取最小得到

$$A^{\mathrm{T}}\Delta A\lambda = A^{\mathrm{T}}\Delta\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

其中 $A=(a_{jk})$,

$$\begin{aligned} a_{jk} &= P(D)\Phi(x_j-x_k), \quad k=1,\cdots,n, \\ a_{jk} &= Q(D)\Phi(x_j-x_k), \quad k=n+1,\cdots,n+m, \end{aligned}$$

$$\Delta=\begin{pmatrix} \Delta_j & \\ & w^2\Delta_j \end{pmatrix}$$

是正的对角阵, 从而是非奇异的.

$$f^{\mathrm{T}}=(f(x_1),\cdots,f(x_n)), \qquad g^{\mathrm{T}}=(g(x_{n+1}),\cdots,g(x_{n+m})).$$

如果矩阵 A 本身是非奇异的, 方程还有更简洁的形式

$$A\lambda=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

这个结果也可以看成, 对解 $u(x)$ 用 $u^*(x)=\sum\lambda_j\Phi(x-x_j)$ 逼近, 而要求 [52]

$$\begin{aligned} P(D)u^*(x_j) &= f(x_j), \qquad j=1,\cdots,n, \\ Q(D)u^*(x_j) &= g(x_j), \qquad j=n+1,\cdots,n+m, \end{aligned}$$

这就是所谓的配置法. 由上面的讨论, 这个方法是最小二乘法的一个近似, 所以也有明确的数学意义. 这个方法还有计算简单的优点 (最小二乘法的系数阵要求大量的积分). 大量的实际问题计算结果显示, 这是一个简便又能得到非常好的逼近误差的计算方法. 矩阵 A 的非奇异条件是一个尚未解决的问题, 但是在大量的工程计算中, 由于数据非常多, 矩阵 A 往往非奇异.

3. Galerkin 方法

上述的方法使得误差

$$\sum \lambda_j P(D)\Phi(x-x_j) - f(x),$$

$$\sum \lambda_j Q(D)\Phi(x-x_j) - g(x)$$

在某种最小二乘意义下取最小. 而 Galerkin 希望, 误差与某个径向基函数张成的函数空间正交, 也就是说, 在某个径向基函数张成的函数空间上的投影为零 (很小). 具体地, 取 $\{x_j\}_{j=1}^n \in \Omega$, $\{x_k\}_{k=n+1}^{n+m} \in \partial\Omega$, Galerkin 希望

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j P(D)\Phi(x-x_j) - f(x)\right)\Phi(x-x_k)dx = 0, \quad k=1,\cdots,n,$$

$$\int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j Q(D)\Phi(x-x_j) - g(x)\right)\Phi(x-x_k)dx = 0, \qquad k=n+1,\cdots,n+m,$$

这时 $\lambda = (\cdots,\lambda_j,\cdots)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$A\lambda = D,$$

其中 $A=(a_{jk})$(第一个下标表示行, 第二个下标表示列), 并且

$$a_{kj} = \int_\Omega \Phi(x-x_k)P(D)\Phi(x-x_j)dx, \qquad k=1\leqslant n,$$

$$a_{kj} = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-x_k)Q(D)\Phi(x-x_j)dx, \quad k>n,$$

$D=(d_j)$, 并且

$$d_j = \int_\Omega \Phi(x-x_j)f(x)dx, \qquad j=1,\cdots,n,$$

$$d_j = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-x_j)g(x)dx, \qquad j=n+1,\cdots,n+m.$$

由径向函数的稠密性, 当取的点分别在区域 Ω 及 $\partial\Omega$ 趋于稠密时, 近似解趋于真实解, 关于径向基函数 Galerkin 方法的收敛性讨论可以参见 Wendland 的文章 [40].

4. Golberg 方法

Golberg 采用利用径向基函数逼近方程右端的方法来逼近微分方程的解. 具体的是, 假设方程右端有径向基函数逼近

$$f^*(x) = \sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j \Phi(x-x_j),$$

可以假设就是径向基函数插值, 满足

$$f^*(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \cdots, n,$$

这时线性方程的个数是 n 个, 而未知量有 $n+m$ 个. 所以 λ_j 还不能唯一决定, 求解

$$P(D)\bar{\Phi}(x) = \Phi(x),$$

从而对方程的解得到了一个逼近公式

$$u^*(x) \sim \sum \lambda_j \bar{\Phi}(x - x_j).$$

Golberg 希望

$$Q(D)u^*(x) - g(x)$$

也取较小的值. 这时可采用任何的逼近方法, 譬如插值的方法, 迫使

$$Q(D)u^*(x_j) = g(x_j), \quad j = n+1, \cdots, n+m.$$

从而得到一个插值意义下的逼近. 当然还可以采用其他的逼近方法 (譬如最小二乘法).

针对一些各向同性的方程, 由于函数 Φ 的径向性质, 方程

$$P(D)\bar{\Phi}(x) = \Phi(x)$$

用极坐标表示是一个常微分方程, 从而一般是比较容易求解的 (将一个多元偏微分方程的求解问题转化为一元常微分方程的求解问题), 这时也只要通过解一个线性方程得到解. 如果我们一开始就从 $\bar{\Phi}$ 出发, 那么这个方法与配置法没有本质的区别, 也就是说, 如果一开始就认为 $\bar{\Phi}$ 已知, 那么这个方法等价与利用 $\bar{\Phi}(x)$ 的配置法.

这样类似的方法还可以给出许多, 在有限元方法中无非是采用分片多项式的函数基构成的函数子空间逼近方程的解, 而所有这些过程, 现在都可以用径向基函数构成的径向函数空间逼近代替.

参 考 文 献

[1] Barnhill R, Riesenfeld R. *Computer aided geometric design.* Academic Press, 1974.

[2] Barnhill R. *Representation and approximation of surfaces.* In：Rice J. eds. Mathematical Software. Academic Press, 1977.

[3] Barnhill R. *Surfaces in computer aided geometric design.* North-Holland Amsterdam, 1983.

[4] Farin G. *Curves and surfaces in computer aided geometric design -A practical guide.* Academeic Press, 1988.

[5] 李岳生, 黄友谦. 数值逼近. 人民教育出版社, 1978.

[6] 苏步青, 刘鼎元. 计算几何. 上海科学技术出版社, 1981.

[7] 苏步青, 华宣积. 应用几何教程. 复旦大学出版社, 1990.

[8] Powell M, Sabin M. *Piecewise quadratic approximation on Triangulations.* ACM Trans. on Mathematical Software, 1977, 4: 316 -325.

[9] Gregory J. *C1 rectangular and non-rectangular surface patch.* in：Barnhill eds. *Surfaces in computer aided geometric design.* North-Holland Amsterdam, 1983, 25-34.

[10] Nielson G, Frank R. *Surface construction based upon trigulations.* in：Barnhill eds. *Surfaces in computer aided geometric design.* North-Holland Amsterdam, 1983.

[11] Schumaker L. *Triangulation methods.* in: Chui C. Schumaker L. Utreras F. eds. Topics in Multivariate Approximation. Academic Press, 1987, 219-232.

[12] Coons S. *Surfaces for computer aided design of space forms.* MIT Project MAC 41, 1967.

[13] Chaikin G. *An algorithm for high speed curve generation.* Computer Graphics and Image Processing, 1974, 3: 346-349.

[14] Doo D, Sabin M. *Behavior of recusive division surface near extraordinary points.* Computer aided Design, 1978, 10: 356-360.

[15] Farin G. *Surfaces over Dirichlet tessellations.* Computer Aided Geometric Design, 1990, 7: 281-292.

[16] Sibson R. *A brief description of the natural neighbour interpolation.* In：V.Barnett ed. Interpolating Multivariate Data. Wiley, 1978.

[17] Gordon W, Wixson J. *Shepard method of metric interpolation to bivariate and multivariate data.* Math. Comp, 1978, 32: 253-264.

[18] Shepard D. *A two dimensional interpolation function for irregularly spaced data.* ACM Nat. Conf, 1965, 517 -524.

[19] Wu Zongmin. *Die Kriging Methode zur Lösungen mehrdimensionaler Interpolationsprobleme.* Ph. D. Dissertation. Universität Göttingen, 1986.

[20] Wu Zongmin. *Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis function.* Approx. Theory & its Appl, 1992, 8: 1-10.

[21] Duchon J. *Splines minimizing rolation-invariant semi-norms in Sobolev space.* In：Schempp W. eds. Constructive Theory of Functions of Several Variables. Springer-Verlag, 1976.

[22] Oberhettinger F. *Tables of Fourier transforms and Fourier transforms of distributions.* Springer-Verlag, 1990.

[23] Hardy R. *Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces.* J. Geophysical Research, 1971, 76: 1905-1915.

[24] Powell M. *Radial basis functions for multivariable interpolation: a review.* In：Griffiths D. Watson G. eds. Numerical Analysis. Longman Scientific & Technical, 1987, 223-241.

[25] Micchelli C. *Interpolation of scattered data: distance matrix and conditionally positive definite functions.* Constructive Approximation, 1986, 2: 11-22.

[26] Beatson R, Powell M. *Univariate multiquadric approximation: quasi interpolation to scattered data.* DAMTP NAT reports. University of Cambridge, 1990.

[27] Wu Zongmin, Schaback R. *Shape preserving properties and convergence of univariate multiquadric quasi- interpolation.* ACTA Mathematice Applicatae Sinica, 1994, 10: 441-446.

[28] 吴宗敏. 函数的径向基表示. 数学进展, 1998, 27: 202-208.

[29] 吴宗敏. 径向基函数、散乱数据拟合与无网格微分方程数值解. 工程数学学报, 2002, 19: 1-12.

[30] Buhmann M. *Multivariable interpolation using radial basis functions.* Ph.D. dissertation, University of Cambridge, 1989.

[31] Light W. *Some aspects of radial basis function approximation.* In：Singh S. ed. Approximation Theory, Spline Functions and Applications. NATO ASI Series, 1992, 356: 163-190.

[32] Schaback R. *Lower bounds for norms of inverses of interpolation matricds for radial basis functions.* J. Approx. Theory, 1994, 79: 287-300.

[33] Schaback R. Wu Zongmin *Operators on radial functions.* J. Computational and Applied Mathematics, 1996, 73: 257- 270.

[34] Schaback R. Wu Zongmin *Construction techniques for highly accurate quasi- interpolation operators.* Journal of Approximation Theory, 1997, 91: 320-331.

[35] Golberg M, Chen C. *A bibliography on radial basis function approximation.* Boundary Elements, 1996, 7: 155-163

[36] Frank R. *Scattered data interpolation: tests of some methods.* Mathematical Computation, 1982, 38: 181-200.

[37] Narcowich F, Ward J. *Norm of inverses and condition numbers for matrices associated with scattered data.* J. Approximation Theory, 1991, 64: 69-94.

[38] Wu Zongmin, Schaback R.*Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data.* IMA Journal of Numerical Analysis, 1993, 13: 13-27.

[39] Madych W, Nelson S. *Multivariate interpolation and conditionally positive definite function.* Mathematics of Computation, 1990, 54(189): 211-230.

[40] Stein E, Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, 1971.

[41] Strang G, Fix G. *An Analysis of the finite element method.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1978.

[42] Wu Zongmin. *Multivariate compactly supported positive definite radial functions.* Advances in Computational Mathematics, 1995, 4: 283-292.

[43] Wu Zongmin. *Characterization of positive definite radial functions.* In：Dælen M. Lyche T. Schumaker L. eds. Mathematical Methods for Curves and Surfaces. Vanderbilt University Press, 1995, 573-578.

[44] Wu Zongmin. *Compactly supported radial function and the Strang-Fix conditions.* Applied Mathematics and Computation, 1997, 84: 115-124.

[45] Wu Zongmin. *Generalized Bochner's theorem for radial function.* Appox. Theory & its Appl, 1997, 3: 47-57.

[46] Schoenberg I. *Metric space and completely monotone functions.* Ann. Math, 1938, 39: 811-841.

[47] Wendland H. *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree.* Adv. Comput. Math, 1995, 4: 389-396.

[48] Luke Y. *The special functions and their applications.* Academic Press, 1969.

[49] Wu Zongmin, Liu Jianping. *Generalized Strang-Fix condition for scattered data quasi- interpolation.* Advance in Computational Mathematics, 2005, 23: 200-214.

[50] Lancaster P, Salkauskas K. *Surfaces generated by moving least squares methods.* Math. Comp, 1981, 37: 141-158.

[51] Wu Zongmin. *Solving differential equation with radial basis functions.* In：Wang D. eds. Advances in Computational Mathematics-Lecture Note in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 1999, 202: 537-544.

[52] Kansa E. *Multiquadrics- a scattered data approximation schem with applications to computational fluid dynamics-II. Sollution to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations.* Computers Math. Applic, 1990, 19: 147-161.